

Matematică discretă - Logica propozițională

Regulile logicii matematice specifică metode de raționament a afirmațiilor matematice. Filosoful grec, Aristotel, a fost pionierul raționamentului logic. Raționamentul logic oferă baza teoretică pentru multe domenii ale matematicii și, în consecință, informatică. Are multe aplicații practice în informatică, cum ar fi proiectarea mașinilor de calcul, inteligența artificială, definirea structurilor de date pentru limbaje de programare etc.

Logica **propozițională** se preocupă de enunțuri cărora li se pot atribui valorile de adevăr, „adevărat” și „fals”. Scopul este de a analiza aceste afirmații fie individual, fie într-o manieră compusă.

Logica propozițională – Definiție

O propoziție este o colecție de enunțuri declarative care are fie o valoare de adevăr „adevărat”, fie o valoare de adevăr „falsă”. O propozițională constă din variabile propoziționale și conjunctive. Notăm variabilele propoziționale cu majuscule (A, B, etc). Conectivile conectează variabilele propoziționale.

Câteva exemple de Propoziții sunt date mai jos –

- „Omul este mortal”, returnează valoarea de adevăr „ADEVĂRAT”
- „ $12 + 9 = 3 - 2$ ”, returnează valoarea de adevăr „FALSE”

Următoarea nu este o Propoziție –

- „A este mai mic de 2”. Se datorează faptului că, dacă nu dăm o anumită valoare a lui A, nu putem spune dacă afirmația este adevărată sau falsă.

Conjunctive

În logica propozițională, în general, folosim cinci conjunctive care sunt –

- SAU ($\vee$)
- ȘI ($\wedge$)
- Negație/ NU ($\neg$)
- Implicație / dacă-atunci ($\rightarrow$)
- Dacă și numai dacă ($\Leftrightarrow$).

SAU ($\vee$) – Operația OR a două propoziții A și B (scrise ca $A \vee B$) este adevărată dacă cel puțin oricare dintre variabilele propoziționale A sau B este adevărată.

Tabelul de adevăr este următorul –

A	B	$A \vee B$
Adevărat	Adevărat	Adevărat
Adevărat	Fals	Adevărat
Fals	Adevărat	Adevărat
Fals	Fals	Fals

ȘI ($\wedge$) – Operația AND a două propoziții A și B (scrise ca $A \wedge B$) este adevărată dacă atât variabila propozițională A cât și B sunt adevărate.

Tabelul de adevăr este următorul –

A	B	$A \wedge B$
Adevărat	Adevărat	Adevărat
Adevărat	Fals	Fals
Fals	Adevărat	Fals
Fals	Fals	Fals

Negație ($\neg$) – Negația unei propoziții A (scrisă ca $\neg A$) este fals când A este adevărat și este adevărat când A este fals.

Tabelul de adevăr este următorul –

A	$\neg A$
Adevărat	Fals
Fals	Adevărat

Implicație / dacă-atunci ($\rightarrow$) – O implicație $A \rightarrow B$ este propoziția „dacă A, atunci B”. Este fals dacă A este adevărat și B este fals. Restul cazurilor sunt adevărate.

Tabelul de adevăr este următorul –

A	B	$A \rightarrow B$
Adevărat	Adevărat	Adevărat
Adevărat	Fals	Fals
Fals	Adevărat	Adevărat
Fals	Fals	Adevărat

Dacă și numai dacă ($\Leftrightarrow$) – $A \Leftrightarrow B$ este conjunctiv logic bicondițional care este adevărat când p și q sunt la fel, adică ambele sunt false sau ambele sunt adevărate.

Tabelul de adevăr este următorul –

A	B	$A \Leftrightarrow B$
Adevărat	Adevărat	Adevărat
Adevărat	Fals	Fals
Fals	Adevărat	Fals
Fals	Fals	Adevărat

Tautologii

O tautologie este o formulă care este întotdeauna adevărată pentru fiecare valoare a variabilelor sale propoziționale.

Exemplu – Demonstrați $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$ este o tautologie

Tabelul de adevăr este următorul –

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$	$[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$
Adevărat	Adevărat	Adevărat	Adevărat	Adevărat
Adevărat	Fals	Fals	Fals	Adevărat
Fals	Adevărat	Adevărat	Fals	Adevărat
Fals	Fals	Adevărat	Fals	Adevărat

După cum putem vedea fiecare valoare a $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$ este „adevărat”, este o tautologie.

Contradicții

O contradicție este o formulă care este întotdeauna falsă pentru fiecare valoare a variabilelor sale propoziționale.

Exemplu – Demonstrați $(A \vee B) \wedge [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ este o contradicție

Tabelul de adevăr este următorul –

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$(A \vee B) \wedge [(\neg A) \wedge (\neg B)]$
Adevărat	Adevărat	Adevărat	Fals	Fals	Fals	Fals
Adevărat	Fals	Adevărat	Fals	Adevărat	Fals	Fals
Fals	Adevărat	Adevărat	Adevărat	Fals	Fals	Fals
Fals	Fals	Fals	Adevărat	Adevărat	Adevărat	Fals

După cum putem vedea fiecare valoare a $(A \vee B) \wedge [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ este „fals”, este o contradicție.

Contingenta

O contingentă este o formulă care are atât valori adevărate, cât și unele false pentru fiecare valoare a variabilelor sale propoziționale.

Exemplu – Demonstrați $(A \vee B) \wedge (\neg A)$ o contingentă

Tabelul de adevăr este următorul –

A	B	$A \vee B$	$\neg A$	$(A \vee B) \wedge (\neg A)$
Adevărat	Adevărat	Adevărat	Fals	Fals
Adevărat	Fals	Adevărat	Fals	Fals
Fals	Adevărat	Adevărat	Adevărat	Fals
Fals	Fals	Fals	Adevărat	Fals

Adevărat	Adevărat	Adevărat	Fals	Fals
Adevărat	Fals	Adevărat	Fals	Fals
Fals	Adevărat	Adevărat	Adevărat	Adevărat
Fals	Fals	Fals	Adevărat	Fals

După cum putem vedea fiecare valoare a $(A \vee B) \wedge (\neg A)$ are atât „adevărat”, cât și „fals”, este o contingență.

Echivalențe propoziționale

Două afirmații X și Y sunt echivalente din punct de vedere logic dacă oricare dintre următoarele două condiții este valabilă -

- Tabelele de adevăr ale fiecărei afirmații au aceleași valori de adevăr.
- Declarația bicondițională $X \Leftrightarrow Y$ este o tautologie.

Exemplu – Demonstrați $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ și $\neg(A \vee B)$ sunt echivalente

Testarea prin ^{prima} metodă (Tabelul de adevăr de potrivire)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
Adevărat	Adevărat	Adevărat	Fals	Fals	Fals	Fals
Adevărat	Fals	Adevărat	Fals	Fals	Adevărat	Fals
Fals	Adevărat	Adevărat	Fals	Adevărat	Fals	Fals
Fals	Fals	Fals	Adevărat	Adevărat	Adevărat	Adevărat

Aici, putem vedea valorile de adevăr ale $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$ și $\neg(A \vee B)$ sunt aceleași, deci afirmațiile sunt echivalente.

Testare prin metoda a doua (Bicondiționalitate)

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
Adevărat	Adevărat	Fals	Fals	Adevărat
Adevărat	Fals	Fals	Fals	Adevărat

Fals	Adevărat	Fals	Fals	Adevărat
Fals	Fals	Adevărat	Adevărat	Adevărat

La fel de $[\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ $[\neg(A \vee B)] \Leftrightarrow [(\neg A) \wedge (\neg B)]$ este o tautologie, enunțurile sunt echivalente.

Invers, Conversa și Contrapozitiv

Implicație / dacă-atunci ($\rightarrow$)($\rightarrow$) se mai numește și declarație condiționată. Are două părți –

- Ipoteza, p
- Concluzie, q

După cum am menționat mai devreme, este notat ca $p \rightarrow q$.

Exemplu de declarație condiționată - „Dacă îți faci temele, nu vei fi pedepsit.” Aici, „îți faci temele” este ipoteza, p, iar „nu vei fi pedepsit” este concluzia, q.

Invers - O inversă a enunțului condiționat este negația atât a ipotezei, cât și a concluziei. Dacă afirmația este „Dacă p, atunci q”, inversul va fi „Dacă nu p, atunci nu q”. Astfel inversul lui $p \rightarrow q$ este $\neg p \rightarrow \neg q$.

Exemplu – Inversul lui „Dacă îți faci temele, nu vei fi pedepsit” este „Dacă nu-ți faci temele, vei fi pedepsit.”

Converse - Reciproca declarația condiționată este calculată prin interschimbarea ipotezei și concluziei. Dacă afirmația este „Dacă p, atunci q”, inversul va fi „Dacă q, atunci p”. Reversul $p \rightarrow q$ este $q \rightarrow p$.

Exemplu – Reversul „Dacă îți faci temele, nu vei fi pedepsit” este „Dacă nu vei fi pedepsit, îți faci temele”.

Contrapozitiv – Contrapozitivul condiționalului se calculează prin interschimbarea ipotezei și concluziei enunțului invers. Dacă afirmația este „Dacă p, atunci q”, contrapozitivul va fi „Dacă nu q, atunci nu p”. Contrapozitivul lui $p \rightarrow q$ este $\neg q \rightarrow \neg p$.

Exemplu – Contra-pozitivul „Dacă îți faci temele, nu vei fi pedepsit” este „Dacă ești pedepsit, nu ți-ai făcut temele”.

Principiul dualității

Principiul dualității afirmă că pentru orice afirmație adevărată, afirmația duală obținută prin schimbarea uniunilor în intersecții (și invers) și schimbarea mulțimii universale în mulțimea nulă (și invers) este de asemenea adevărată. Dacă dualul oricărei afirmații este afirmația în sine, se spune afirmație

auto-duală .

Exemplu – Dualul de $(A \cap B) \cup C$ este $(A \cup B) \cap C$

Forme normale

Putem converti orice propoziție în două forme normale –

- Forma normală conjunctivă
- Forma normală disjunctivă

Forma normală conjunctivă

O declarație compusă este în formă normală conjunctivă dacă este obținută prin operarea AND între variabile (negarea variabilelor incluse) conectate cu OR. În ceea ce privește operațiile de set, este o declarație compusă obținută prin Intersecție între variabile legate de uniuni.

Exemple

- $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C \vee D)$
- $(P \cup Q) \cap (Q \cup R)$

Forma normală disjunctivă

O declarație compusă este în formă normală disjunctivă dacă este obținută prin operarea OR între variabile (negarea variabilelor incluse) conectate cu AND. În ceea ce privește operațiile de set, este o declarație compusă obținută de Uniune între variabilele legate de Intersecții.

Exemple

- $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C \wedge D)$
- $(P \cap Q) \cup (Q \cap R)$